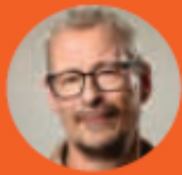
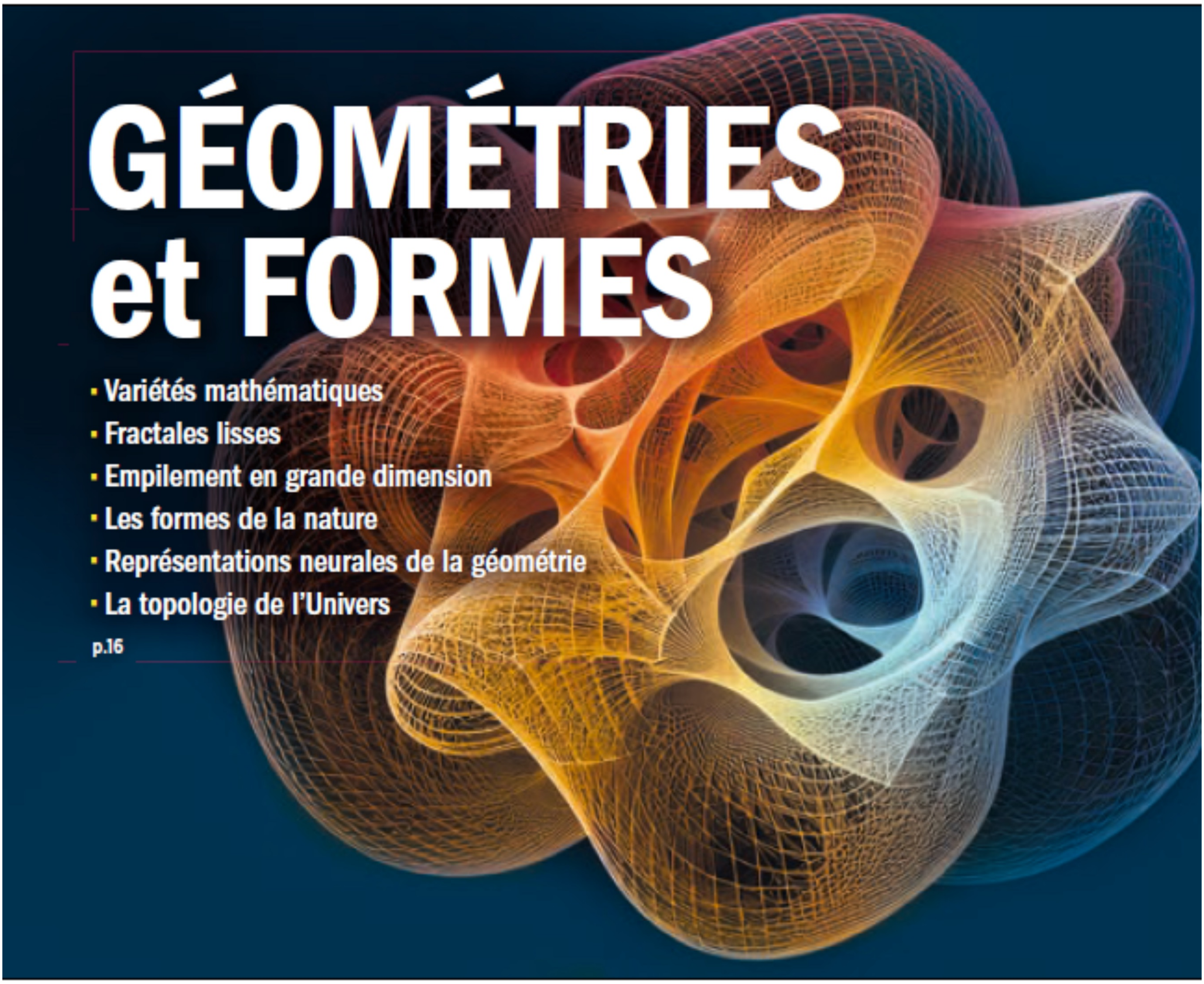
Samantha Besson
Professeure au Collège de France
LE DROIT INTERNATIONAL DE LA SCIENCE
p.6



Eske Willerslev
Université de Cambridge
L'ADN ENVIRONNEMENTAL
p.82

La Recherche

LE MAGAZINE DE RÉFÉRENCE SCIENTIFIQUE - OCTOBRE / DÉCEMBRE 2024 - 9€90



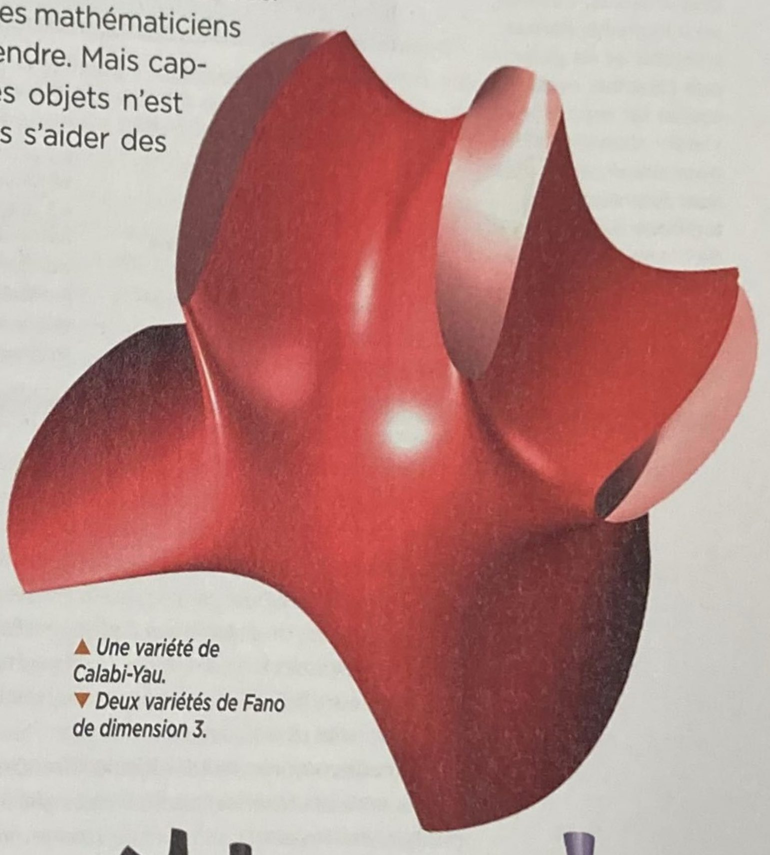
GÉOMÉTRIES et FORMES

- Variétés mathématiques
- Fractales lisses
- Empilement en grande dimension
- Les formes de la nature
- Représentations neurales de la géométrie
- La topologie de l'Univers

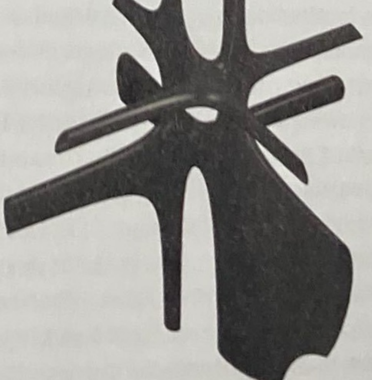
p.16

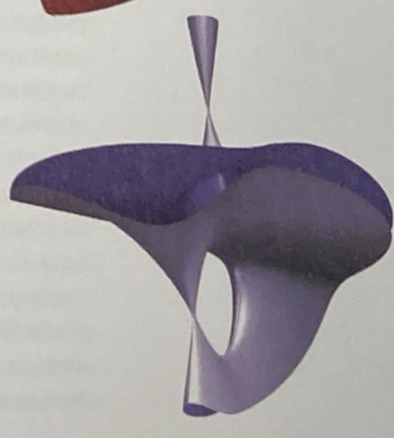
L'IA aide à classer les formes géométriques abstraites

Briques de base de la géométrie, les variétés de Fano sont aussi des objets complexes et hétéroclites que les mathématiciens aimeraient classer pour mieux les comprendre. Mais capturer les propriétés géométriques de ces objets n'est pas une tâche simple. Aussi imaginent-ils s'aider des outils de l'apprentissage automatique.



▲ *Une variété de Calabi-Yau.*
▼ *Deux variétés de Fano de dimension 3.*





GEMMA ANDERSON - A.MACPHERSON ET TOM COATES

Une fois les dernières briques emboîtables placées en suivant les instructions données dans la boîte de jeu, la structure de la tour Eiffel se dresse sous vos yeux. Au moment de ranger, vous ôtez les blocs de construction les uns après les autres. Votre construction redevient un tas de briques rectangulaires. Les mathématiciens – et en particulier les spécialistes de la géométrie algébrique – s'adonnent à des activités comparables. Les « constructions » de cette discipline sont appelées des variétés algébriques. En termes mathématiques, une variété algébrique est l'ensemble des solutions d'une ou de plusieurs équations polynomiales – qui s'écrivent comme une somme de produits d'indéterminées affectés de coefficients. En dimensions 2 et 3, on peut se les représenter par plongement. Par exemple, $y=x^2$ est une courbe plane – de dimension 1 – plon-

Une révolution des mathématiques par l'IA ?

L'astronomie a subi une petite révolution ces dernières années. Grâce au perfectionnement et à la diversité des moyens d'observation désormais disponibles, les êtres humains sont capables de voir bien plus d'astres. *« En fait, on a trouvé tellement d'étoiles et de galaxies que l'humain ne peut pas toutes les regarder. Il doit s'aider d'un algorithme pour savoir quels objets sont intéressants »*, explique Alessio Corti, de l'Imperial College London. Qui compare : *« En mathématiques, nous n'avons pas encore connu cette petite révolution. »*

▲ En astronomie, l'intelligence artificielle est capable de nous restituer des éléments invisibles à l'œil nu (ici une image de galaxies). Il en sera peut-être bientôt de même dans le domaine des mathématiques.

Mais les travaux de Sara Veneziale et ses collègues montrent que les choses pourraient changer, sans nuire pour autant à la rigueur du travail de recherche en mathématiques. *« L'apprentissage automatique ne peut pas donner de preuve, mais il peut suggérer, tester, découvrir des connexions. Reste au mathématicien le travail de le prouver »*, explique Alessio Corti. Cet outil est en particulier adapté aux domaines pour lesquels les données sont conséquentes – comme ici en géométrie algébrique. *« Il y a des problèmes qui sont énormes et qu'il serait impossible de résoudre pour un humain, même en équipe. C'est le cas des variétés de Fano : on ne peut pas regarder les 470 millions d'exemples sans l'aide d'un outil automatisé*, ajoute le mathématicien. *Alors, même si ce n'est pas certain, peut-être que les mathématiques pourraient connaître la même révolution que la physique ! »* C.M.

gée dans un espace de dimension 2 ; la surface d'un sablier représenté par l'équation $z^2=x^2+y^2$ est une surface de dimension 2 plongée dans l'espace de dimension 3. Quand la dimension est supérieure à 3, ce sont des espaces abstraits qu'on ne peut plus dessiner.

Pour mieux comprendre ces objets parfois complexes, les mathématiciens aiment les casser en petits bouts (ou, pour continuer avec notre comparaison, analyser les blocs de construction qui constituent la tour Eiffel). Ces objets élémentaires sont également des variétés algébriques, mais elles n'ont pas n'importe quelle forme. Plus précisément, trois courbures (négative, nulle ou positive) sont associées à trois géométries (hyperbolique, plate ou sphérique). Les variétés correspondantes sont respectivement de type général, de Calabi-Yau ou de Fano. *« Tout ce qui n'est pas sphérique, plat ou hyperbolique peut être cassé en plus petits morceaux qui seront l'une de ces formes »*, explique Alessio Corti, chercheur à l'Imperial College London (Royaume-Uni). Étudier les variétés par le prisme de la brique plutôt que du tout, c'est l'objet d'un vieux projet de recherche en géométrie algébrique baptisé « Programme des modèles minimaux ». Ancien, car il prend ses racines au début des années 1900, d'abord par le biais de l'étude des surfaces dans les travaux du mathématicien italien Guido Castelnuovo (1865-1952). Dans ce cadre, le travail ne s'arrête pas à réussir à casser une variété algébrique donnée en sous-blocs. Les briques de construction elles-mêmes peuvent être rangées en différentes classes. À l'image d'une brique de construction rectangulaire, qui peut être de taille 1×4, 2×3 ou 2×4, une variété de Fano peut être rangée dans différentes sous-catégories – on appelle cela des « familles de déformation » – selon son allure. Dans ce contexte très théorique, des chercheurs ont eu une envie : tester

dans quelle mesure les outils de l'apprentissage automatique peuvent les aider à classifier ces objets. Mais avant de le comprendre, encore faut-il explorer la nature de cette classification. Comme le rappelle Cinzia Casagrande, mathématicienne à l'université de Turin (Italie), *« il y a autant de spécialistes de cette thématique que de visions de ce que "classer" veut dire, et ces approches sont complémentaires »*. Par exemple, comme on s'attend à ce que le nombre de variétés algébriques grossisse à mesure que la dimension augmente – et qu'il soit même infini pour celles de type général –, « classer » peut aussi signifier se procurer des informations générales pour les variétés dans chaque dimension. *« Un peu comme si, pour une grande ville, vous collectiez des statistiques sur le genre, l'âge, le métier, etc., plutôt que de chercher la liste de chacun des habitants »*, compare la chercheuse.

En réussissant à trier ces objets complexes à étudier, les chercheurs espèrent mieux saisir leurs propriétés. *« Classer est quelque chose de naturel pour un spécialiste de mathématiques fondamentales. Vous apprenez et comprenez beaucoup de choses quand vous dressez les classes d'objets »*, éclaire la mathématicienne Sara Veneziale, de l'Imperial College London. Et puis cette meilleure connaissance théorique des variétés pourrait se diffuser dans d'autres domaines de recherche, notamment la théorie des cordes, théorie de physique fondamentale qui postule un espace-temps en dix dimensions, où les quatre dimensions qui jouent le rôle de notre espace-temps sont complétées par six autres, qui prennent la forme d'une variété de Calabi-Yau.

DÉTERMINER SI UNE PROPRIÉTÉ GÉOMÉTRIQUE SPÉCIALE EST RÉPANDUE

Pour l'heure, l'essentiel de l'effort de classification est fait sur les variétés de Fano, ces espaces à courbure positive mis en évidence dans les années 1930 par le mathématicien italien Gino Fano (1871-1952). Et cela pour une raison simple : les mathématiciens János Kollár, Yoichi Miyaoka et Shigefumi Mori ont montré en 1992 qu'il y a un nombre fini de familles de déformation pour les variétés de Fano (1). Autrement dit, un nombre fini de formes de briques. Avec ce résultat, vient alors la possibilité de construire

L'apprentissage statistique parvient à estimer la présence ou non d'une singularité

un tableau périodique des formes – à l'instar du tableau de Mendeleïev pour les éléments chimiques –, qui dresse la liste des variétés de Fano dans chaque dimension.

La liste a déjà été dressée pour les cas particuliers où celles-ci sont « lisses » (sans coin, pli ou brisure) dans deux dimensions : il y a dix familles en dimension 2, dont la sphère ordinaire, et 105 en dimension 3. Dès la dimension 4, la question reste ouverte, mais les mathématiciens s'attendent à ce que la liste dépasse le millier. Pour les suivantes, le nombre de familles continuerait de croître et pourrait vite être déraisonnable. La tâche est encore plus délicate pour les autres types de variétés, les variétés de Calabi-Yau et de type général. *« Il en existe beaucoup plus que de variétés de Fano*, confirme Cinzia Casagrande. *Avec elles, c'est comme si vous passiez de l'étude des personnes dans une ville à celle d'un continent entier ! »*

Pour tenter de démêler cette complexité et de commencer à classer les variétés, pourquoi ne pas utiliser les outils d'intelligence artificielle, capables de voir les structurations qui échappent à l'œil humain ? C'est ce que font Sara Veneziale et deux autres mathématiciens depuis 2023 : Tom Coates, qui travaille lui aussi à l'Imperial College London, et Alexander M. Kasprzyk, de l'université de Nottingham. Ensemble, les trois spécialistes cherchent à évaluer la pertinence de ces techniques pour étudier les variétés de Fano.

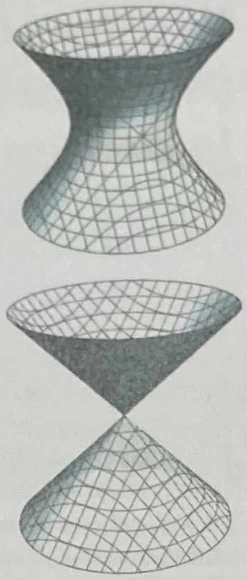
Leur première idée est de s'en servir pour obtenir une vue d'ensemble sur ce type de variétés. Par exemple, pour déterminer si une propriété géométrique spéciale est répandue. *« Il existe un ensemble d'exemples de variétés de Fano en dimension 4 d'environ 470 millions d'éléments. Si on cherche à tester par ordinateur une propriété géométrique et qu'il faut quelques minutes* *pour le faire sur un seul exemple, alors cela prendrait un temps incalculable de tester tous les éléments»*, explique Alessio Corti, qui n'a pas pris part aux études. De ce point de vue, l'avantage de l'apprentissage automatique, c'est qu'il permet de prendre un raccourci : la propriété n'a besoin d'être calculée que sur un petit nombre d'exemples; l'algorithme se charge ensuite de faire des suppositions sur le reste. *«Dans notre cas, nous essayions de voir si les variétés de Fano présentaient une singularité – c'est-à-dire un point où elles ne se comportent pas très bien – d'un aspect particulier»*, explique Sara Veneziale. En l'occurrence, la méthodologie pour regarder si oui ou non la variété présente cette aspérité était lente. Avec ses collègues, elle a donc mis au point un modèle d'apprentissage automatique. À partir d'un petit nombre d'exemples, ce modèle apprend à estimer la présence ou non d'une singularité; ensuite, quand on lui présente une nouvelle variété, il donne la réponse très rapidement (2).

«La réponse de l'algorithme n'est pas toujours correcte – elle l'est tout de même dans 95% des cas – mais ce n'est pas grave car cette approche statistique nous permet d'observer à quel point ce type de singularité est répandu dans tous nos exemples et peut-être d'en déduire des résultats théoriques par la suite», détaille-t-elle.

LA PÉRIODE QUANTIQUE CONTIENT DE L'INFORMATION

Le trio de l'Imperial College et de l'université de Nottingham a ensuite tenté de pousser un peu plus loin l'utilisation de l'intelligence artificielle, afin que celle-ci identifie des caractéristiques internes à une variété, là où l'humain ne voit qu'une donnée difficilement lisible. Ici, il faut se plonger un peu plus profondément dans les propriétés des variétés de Fano.

Pour chaque variété de Fano, il est possible de calculer une séquence de nombres – appelée «période quantique régulière» – en comptant certaines courbes sur la variété. Cette séquence est vue comme l'empreinte digitale d'une variété de Fano, car les mathématiciens ont l'intuition que celle-ci est entièrement déterminée par la seule donnée de sa période quantique. Autrement dit, avec la période quantique pour seule information, on devrait pouvoir dessiner sans erreur la variété de Fano. Reste à démontrer ce qui n'est pour l'instant qu'une conjecture. *«On a voulu tester cette conjecture en essayant de retrouver la propriété la plus simple d'une variété, à savoir sa dimension, à partir de la donnée seule de sa période quantique régulière»*, expose Sara Veneziale. Ses collègues et elle ont donc entraîné un modèle à estimer la dimension d'une variété de Fano à l'aide de sa période quantique. Puis ils l'ont testé et, dans 98% des cas, leur algorithme a donné la bonne dimension. *«Nos résultats vont en faveur de la conjecture car, oui, la période quantique contient bien de l'information sur la variété de Fano !»*, se réjouit-elle (3).



▲ *Exemples de variétés algébriques simples : une variété lisse d'équation $x^2+y^2=z^2+1$ (en haut); variété contenant un point singulier et d'équation $x^2+y^2=z^2$ (en bas).*

UNE MANIÈRE PUISSANTE DE TESTER DES HYPOTHÈSES

Et cette conjecture est importante, car elle est liée à une autre question majeure sur les variétés de Fano. Ces objets ne sont pas les seuls à posséder une «empreinte digitale». Les polynômes de Laurent – une généralisation des polynômes où les quantités indéterminées peuvent être élevées aussi à des puissances négatives (comme $x^{-2}+x+1$) – en ont une, eux aussi. Or, en s'inspirant de travaux en théorie des cordes, les mathématiciens pensent qu'à chaque variété de Fano correspond un polynôme qui a la même période quantique que la variété – d'où leur nom de «partenaire miroir». Cela pourrait faire avancer grandement la classification, car les polynômes de Laurent sont des objets combinatoires beaucoup plus faciles à manipuler et à étudier que les variétés.

Si pour l'heure ces deux études sont des preuves de concept, elles suggèrent tout de même l'idée que l'apprentissage automatique est un outil utile pour explorer les variétés de Fano, que ce soit pour avoir une vue d'ensemble de leurs comportements, ou pour explorer une donnée peu compréhensible – comme ici la période quantique. *«C'est une manière puissante de tester des hypothèses et, en plus, cet outil peut nous aider à voir des motifs que l'humain ignorait jusque-là»*, apprécie Alessio Corti. À voir jusqu'où l'intelligence artificielle, placée entre les mains des mathématiciens, pourrait conduire. ■

Charlotte Mauger

(1) J. Kollár *et al.*, *J. Differ. Geom.*, 36, 765, 1992.
(2) T. Coates *et al.*, *NeurIPS* 2023. tinyurl.com/machine-singularities
(3) T. Coates *et al.*, *Nat. Commun.*, 14, 5526, 2023.